

## TD 6: Trigonalisation

**Exercice 1.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Pour quelles valeurs de  $a, b, c$ ,  $A$  est-elle diagonalisable (sur  $\mathbb{R}$ ) ?

**Exercice 2.** On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer leurs valeurs propres.
2. Déterminer si la matrice  $A$  est diagonalisable. Si oui, trouver une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $A = PDP^{-1}$ . Sinon, trouver une matrice triangulaire supérieure  $U$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $A = PUP^{-1}$ .
3. De même pour  $B$ .

**Exercice 3.** Pour chacune des matrices ci-dessous, donner une matrice triangulaire supérieure  $U_i$  et une matrice inversible  $P_i$  tel que  $A_i = P_i U_i P_i^{-1}$  :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système différentiel  $\frac{d\vec{v}}{dt} = A_1 \vec{v}$  avec condition initiale  $\vec{v}(0) = (1, 2, 2)$ .

**Exercice 4.** Soit  $Q$  un polynôme et  $f: E \rightarrow E$  un endomorphisme, avec  $E$  de dimension  $n$ .

1. Montrer que si  $f$  est diagonalisable alors  $Q(f)$  est diagonalisable.
2. Montrer que si  $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  est le spectre de  $f$ , alors  $\text{Sp}(Q(f)) = \{Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_p)\}$ .
3. Montrer que si  $f^{2022} = 0$ , alors  $f^n = 0$ .

**Exercice 5.** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique  $P_A(X)$  de  $A$ .
2. Pour chaque diviseur  $P(X)$  de  $P_A(X)$ , déterminer si  $P(X)$  est un polynôme annulateur de  $A$ .
3. En utilisant partie (2.), calculer pour tout entier  $n \geq 0$  les  $\alpha_n, \beta_n \in K$  tels que

$$A^n = \alpha_n \cdot A + \beta_n \cdot I_n.$$

**Exercice 6.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice  $A^{2022}$ . (Indication : Cayley–Hamilton.)

**Exercice 7.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $A^{-1}$  en utilisant le théorème de Cayley–Hamilton.

**Exercice 8.** Soit la matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de  $A$  (on pourra remplacer la colonne  $C_1$  par la somme des colonnes). Décomposer  $P_A$  en facteurs premiers. En déduire que

$$\mathbb{R}^4 = \text{Ker}(A - I)^2 \oplus \text{Ker}(A^2 + I).$$

**Exercice 9.** (\*) Soient  $A, B \in M_2(\mathbb{C})$  telles que  $A = AB - BA$ . Montrer que  $A^2 = 0$ . (Indication : identifier les coefficients du polynôme caractéristique de  $A$ .)

**Exercice 10.** (\*) Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $Q(X) = Q_1(X)Q_2(X)$  un annulateur de  $f$ . Soient  $U_1(X), U_2(X)$  deux polynômes tels que  $U_1Q_1 + U_2Q_2 = 1$ . Montrer que les projecteurs de

$$E = \text{Ker}(Q_1(f)) \oplus \text{Ker}(Q_2(f))$$

sur  $\text{Ker}(Q_1(f))$  et  $\text{Ker}(Q_2(f))$  sont respectivement  $\text{pr}_1 = U_2(f) \circ Q_2(f)$  et  $\text{pr}_2 = U_1(f) \circ Q_1(f)$ .

**Exercice 11.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit  $Q_1(X) = (X + 2)$  et  $Q_2(X) = (X - 1)^2$ . Montrer que  $Q_1(X)Q_2(X)$  est un polynôme annulateur de  $A$ . (Indication : calculer le polynôme caractéristique.)
2. Trouver des polynômes  $U_1(X)$  et  $U_2(X)$  tels que  $U_1(X) \cdot (X + 2) + U_2(X) \cdot (X - 1)^2 = 1$ . En utilisant l'exercice précédent, donner les projecteurs sur les espaces caractéristique de  $A$  associés aux valeurs propres 1 et  $-2$ .

**Exercice 12.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  une matrice telle que  $A^n = I_n$ .

1. Qu'est-ce qu'on peut dire sur les valeurs propres de  $A$ ? Montrer que la trace de  $A$  satisfait  $|\text{Tr}(A)| \leq n$ .
2. Montrer que  $A$  est diagonalisable (sur  $\mathbb{C}$ ).
3. Montrer que  $A = I_n$  si et seulement si  $\text{Tr}(A) = n$ .